# Решение систем логических уравнений.

Задачи, в которых нужно найти количество решений системы логических уравнений, с каждым годом становятся все разнообразнее, интереснее и сложнее. В настоящее время процент выполнения этого задания ниже 15%[1] среди всех выпускников, сдававших ЕГЭ по информатике. Это значит, что данное задание до сих пор представляет сложность не только для учащихся, но и для учителей. Порой бывает сложно не только решить СЛУ нового типа, но и разобраться в уже готовом решении.

Конечно, нельзя выделить один универсальный способ, как решать СЛУ и применять его для всех заданий. Каждая система уравнений уникальна и для того, чтобы её решить необходимо сначала её проанализировать. Одна и та же СЛУ может иметь несколько решений, ваша задача решить её как можно проще и быстрее.

Мы разберём несколько систем логических уравнений, которые можно решить разными способами.

**Первый способ**: самый простой – «табличный». Он подходит для тех систем, где все уравнения однотипны, т.е. второе уравнение подобно первому, третье – второму и т.д. Каждое новое уравнение в системе должно содержать переменные, которые есть в предыдущем уравнении. Количество общих переменных не должно быть больше 2. Желательно, чтобы общие переменные имели одинаковые значения, т.е. были «парой». В противном случае, этот метод становится не эффективным и нужно решать СЛУ по-другому.

*Пример 1*. (демонстрационный вариант 2016 года)

(¬ (x1 ≡ y1)) ≡ (x2 ≡ y2)
(¬ (x2 ≡ y2)) ≡ (x3 ≡ y3)
…
(¬ (x8 ≡ y8)) ≡ (x9 ≡ y9)

Шаг 1. Найдём количество решений для первого уравнения.

Из уравнения видно, что если две соседних переменные не равны, то следующая пара переменных обязательно должна быть равной: $(x_i \neq y_i) \rightarrow (x_{i+1} = y_{i+1})$.

И наоборот, если первая пара переменных одинаковая, то следующая должна иметь разные значения: $(x_i = y_i) \rightarrow (x_{i+1} \neq y_{i+1})$.

Исходя из этого правила, построим таблицу истинности для первого уравнения, в которую войдут только нужные нам строки (те, при которых функция истинна).

Таблица 1.

| $X_1$ | $Y_1$ | $X_2$ | $Y_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Пусть $x_1$ и $y_1$ имеют разные значения (0,1 или 1,0), тогда $x_2$ и $y_2$ будут одинаковы (0,0 или 1,1).

Пусть $x_1$ и $y_1$ имеют одинаковые значения (0,0 или 1,1), тогда $x_2$ и $y_2$ будут разные (0,1 или 1,0).

Итого, по первому уравнению мы имеем 8 наборов переменных.

Шаг 2. Найдём количество решений для второго уравнения.

Варианты решений второго уравнения будут точно такими же, как и для первого.

Таблица 2.

| $X_2$ | $Y_2$ | $X_3$ | $Y_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

1 – Аналитический отчет о результатах ЕГЭ-2015. Информатика и ИКТ. URL: http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1442163533/informatika_i_ikt.pdf (дата обращения 19.12.2015).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Шаг 3. Добавьте во вторую таблицу два столбца для общих переменных: $x_1$ и $y_1$.

Таблица 3.

| $X_1$ | $Y_1$ | $X_2$ | $Y_2$ | $X_3$ | $Y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | | 1 | 1 | 1 | 0 |

Не обращая внимания на столбцы значений $x_3$ и $y_3$ вставьте значения для $x_1$ и $y_1$ , исходя из таблицы 1.

Берем первую строку таблицы: $x_2=0$, $y_2=1$
Смотрим в таблице 1 чему будут равны переменные $x_1$ и $y_1$ : при $x_2=0$, а $y_2=1$, значения переменных $x_1$ и $y_1$ могут быть либо $x_1=0$, $y_1=0$, либо $x_1=1$, $y_1=1$.
Если $x_2=1$, а $y_2=0$, то $x_1$ и $y_1$ также могут быть либо $x_1=0$, $y_1=0$, либо $x_1=1$, $y_1=1$.

И так далее заполняем всю таблицу:

Таблица 4.

| $X_1$ | $Y_1$ | $X_2$ | $Y_2$ | $X_3$ | $Y_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0<br>1 | 0<br>1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0<br>1 | 0<br>1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0<br>1 | 0<br>1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0<br>1 | 0<br>1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0<br>1 | 1<br>0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0<br>1 | 1<br>0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0<br>1 | 1<br>0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0<br>1 | 1<br>0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Видно, что, после добавления второго уравнения, количество найденных решений увеличилось в два раза.

Так как все уравнения в нашей системе однотипны, то каждое следующее уравнение также будет увеличивать количество решений в два раза.

Всего в данной системе 8 уравнений.

Итого: 8*2*2*2*2*2*2*2=1024 решения.

*Ответ: 1024*

Но такое простое решение подходит не для всех систем. Бывает, что даже для одного уравнения СЛУ трудно (невозможно) построить таблицу истинности, не говоря уже о том, чтобы объединить в таблице два уравнения.

**Второй способ:** замена выражений простыми переменными. Этот способ особенно эффективен, когда вы видите, что после замены можно получить логическую операцию – импликацию.

*Пример 2.*
$(x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_4) = 1$
$(x_3 \to x_4) \to (x_5 \to x_6) = 1$

$(x_5 \to x_6) \to (x_7 \to x_8) = 1$
$(x_7 \to x_8) \to (x_9 \to x_{10}) = 1$

Шаг 1. Введем замены:
$Z_1 = (x_1 \to x_2)$
$Z_2 = (x_3 \to x_4)$
$Z_3 = (x_5 \to x_6)$
$Z_4 = (x_7 \to x_8)$
$Z_5 = (x_9 \to x_{10})$

Тогда система уравнений примет более простой вид:
$Z_1 \to Z_2 = 1$
$Z_2 \to Z_3 = 1$
$Z_3 \to Z_4 = 1$
$Z_4 \to Z_5 = 1$

Можно переписать СЛУ в виде одного уравнения:

$(Z_1 \to Z_2)*(Z_2 \to Z_3)*(Z_3 \to Z_4)*(Z_4 \to Z_5) = 1$

Как и СЛУ, это уравнение будет истинно только в том случае, когда каждый из множителей будет принимать значение ИСТИНА.

Шаг 2. Построим таблицу истинности для нашего уравнения, в которую войдут только те строки, при которых уравнение истинно.

Таблица 5.

| $Z_1 \le$ | $Z_2 \le$ | $Z_3 \le$ | $Z_4 \le$ | $Z_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Внутри скобок – операция импликация между двумя соседними переменными: $Z_i \to Z_{i+1}$

Импликация принимает значение истина, если первая переменная будет меньше или равна второй переменной. Это значит, что для того, чтобы всё уравнение (вся система) была истинна, необходимо и достаточно, чтобы $Z_i \le Z_{i+1}$

Шаг 3. Для каждого из набора решений $Z_1$-$Z_5$ найдем количество решений x.

Возьмём первую строчку таблицы истинности: $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 0$
$Z_1 = (x_1 \to x_2)$, $Z_2 = (x_3 \to x_4)$, $Z_3 = (x_5 \to x_6)$, $Z_4 = (x_7 \to x_8)$, $Z_5 = (x_9 \to x_{10})$
Следовательно, $(x_1 \to x_2) = 0$ И $(x_3 \to x_4) = 0$ И $(x_5 \to x_6) = 0$ И $(x_7 \to x_8) = 0$ И $(x_9 \to x_{10}) = 0$
Импликация принимает значение ЛОЖЬ в одном единственном случае$(1 \to 0)$

Значит, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=1$, $x_6=0$, $x_7=1$, $x_8=0$, $x_9=1$, $x_{10}=0$. Итого 1 набор.

Таблица 6.

| $Z_1$-$Z_5$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00000 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | итого: 1 решение |
| 00001 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | возможно 3 варианта | | итого: 3 решения |
| 00011 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | возможно 3 варианта | | возможно 3 варианта | | итого: 9 решений |
| 00111 | 1 | 0 | 1 | 0 | возможно 3 варианта | | Возможно 3 варианта | | возможно 3 варианта | | итого: 27 решений |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01111 | 1 | 0 | возможно 3 варианта | возможно 3 варианта | возможно 3 варианта | возможно 3 варианта | итого: 81 решение |
| 11111 | возможно 3 варианта | | возможно 3 варианта | возможно 3 варианта | возможно 3 варианта | возможно 3 варианта | итого: 243 решения |

Общее количество решений: 1+3+9+27+81+243=364

*Ответ: 364*

Метод с заменой выражений очень хорош, но также не универсален. Есть такие СЛУ, где не подходит ни один из способов. Такие системы можно попытаться решить «целиком», не дробя на отдельные уравнения.

**Третий способ**: Анализ всей системы уравнений.

*Пример 3.*
$((x_1*x_2)\to x_3)*((x_4*x_5)\to x_6)=1$
$((x_4*x_5)\to x_6)*((x_7*x_8)\to x_9)=1$
$((x_7*x_8)\to x_9)*((x_{10}*x_{11})\to x_{12})=1$

Решение: табличный способ не эффективен, т.к. слишком много общих переменных ($x_1,x_2,x_3$). Метод замены не эффективен, т.к. корневая операция – конъюнкция.

Перепишем систему в следующем виде:
$((x_1*x_2)\to x_3)*((x_4*x_5)\to x_6)*((x_7*x_8)\to x_9)*((x_{10}*x_{11})\to x_{12})=1$

Для того, чтобы все уравнение было истинно, необходимо и достаточно, чтобы каждый из множителей принимал значение ИСТИНА.

Найдём количество решений для первого множителя.

Таблица 7.

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0<br>1 |
| 1 | 0 | 0<br>1 |
| 0 | 0 | 0<br>1 |
| 1 | 1 | 1 |

Если в результате операции $x_1*x_2$ была получена ЛОЖЬ, то $x_3$ может принимать любое значение (0 или 1)

Если в результате операции $x_1*x_2$ была получена ИСТИНА, то $x_3$ может принимать только одно значение (1)

Следовательно, всего мы получаем 7 вариантов решений (для первого множителя).

Всего таких множителей 4, каждый из которых даст 7 решений. Итого: 7*7*7*7=2401 набор.

*Ответ: 2401*

**Литература**


1. К.Ю. Поляков, М.А. Ройтберг. Системы логических уравнений: решение с помощью битовых цепочек // Информатика, № 12, 2014, с. 4-12.
2. Буртаева О.Н. Подготовка к ЕГЭ по информатике [Электронный ресурс] URL: http://distan-school.ru/info/?sub=1 (дата обращения 20.12.2015).